В изложении доцента БГТУ Сахарова В.Ю.

Пусть произведено n взаимно независимых экспериментов с многомерной случайной величиной. Для определённости будем рассматривать трёхмерную случайную величину (X, Y, Z). Получены тройки чисел (X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2), … , (X_n, Y_n, Z_n). Рассмотрим самую простую линейную корреляционную зависимость. Это означает, что: $Z = a \cdot X + b \cdot Y + c + \varepsilon$. Где ε это случайная величина с математическим ожиданием равным нулю. Применим метод наименьших квадратов.

Минимизируем функцию трёх аргументов:

$f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right)^2$. Согласно теоремам математического анализа функция трёх переменных будет достигать минимума в той точке, где все три её частные производные равны нулю. Найдём эти производные:

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a}\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right)\frac{\partial}{\partial a}\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right)(-X_i) = 2\sum_{i=1}^{n} X_i\left(a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c - Z_i\right) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(a \cdot (X_i)^2 + b \cdot X_i \cdot Y_i + c \cdot X_i - X_i \cdot Z_i\right) =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n} a \cdot (X_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} b \cdot X_i \cdot Y_i + \sum_{i=1}^{n} c \cdot X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Z_i\right) =$$

$$= 2\left(a \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i + c \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Z_i\right)$$

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b}\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right)\frac{\partial}{\partial b}\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(Z_i - (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c)\right)(-Y_i) = 2\sum_{i=1}^{n} Y_i\left(a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c - Z_i\right) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(a \cdot X_i \cdot Y_i + b \cdot (Y_i)^2 + c \cdot Y_i - Y_i \cdot Z_i\right) =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n} a \cdot X_i \cdot Y_i + \sum_{i=1}^{n} b \cdot (Y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} c \cdot Y_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot Z_i\right) =$$

$$= 2\left(a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2 + c \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot Z_i\right)$$

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \left(a\cdot X_i + b\cdot Y_i + c\right)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial c}\left(Z_i - \left(a\cdot X_i + b\cdot Y_i + c\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(Z_i - \left(a\cdot X_i + b\cdot Y_i + c\right)\right)\frac{\partial}{\partial c}\left(Z_i - \left(a\cdot X_i + b\cdot Y_i + c\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\left(Z_i - \left(a\cdot X_i + b\cdot Y_i + c\right)\right)(-1) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot X_i + b\cdot Y_i + c - Z_i\right) =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n} a\cdot X_i + \sum_{i=1}^{n} b\cdot Y_i + \sum_{i=1}^{n} c - \sum_{i=1}^{n} Z_i\right) =$$

$$= 2\left(a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i + b\cdot\sum_{i=1}^{n} Y_i + n\cdot c - \sum_{i=1}^{n} Z_i\right)$$

Теперь приравняем все эти 3 частные производных нулю. Получим систему трёх уравнений относительно трёх неизвестных:

$$\begin{cases} 2\left(a\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Y_i + c\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Z_i\right) = 0 \\ 2\left(a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Y_i + b\cdot\sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2 + c\cdot\sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i\cdot Z_i\right) = 0 \\ 2\left(a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i + b\cdot\sum_{i=1}^{n} Y_i + n\cdot c - \sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Y_i + c\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Z_i = 0 \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Y_i + b\cdot\sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2 + c\cdot\sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i\cdot Z_i = 0 \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i + b\cdot\sum_{i=1}^{n} Y_i + n\cdot c - \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Y_i + c\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Z_i \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Y_i + b\cdot\sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2 + c\cdot\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i\cdot Z_i \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i + b\cdot\sum_{i=1}^{n} Y_i + n\cdot c = \sum_{i=1}^{n} Z_i \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Y_i & \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i\cdot Y_i & \sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} Y_i & \sum_{i=1}^{n} Y_i\cdot Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} Y_i & n & \sum_{i=1}^{n} Z_i \end{array}\right)$$

Линейную систему уравнений можно решить, сразу записав ответы по формулам Крамера. Для удобства вычисления определителей можно использовать встроенную в Microsoft Office Excel функцию МОПРЕД(массив), возвращающую определитель матрицы.

$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}$, $b = \frac{\Delta_b}{\Delta}$, $c = \frac{\Delta_c}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i & \sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} Y_i & n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Z_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot Z_i & \sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i & \sum_{i=1}^{n} Y_i & n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Z_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i & \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot Z_i & \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} Z_i & n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i & \sum_{i=1}^{n}(Y_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot Z_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} Y_i & \sum_{i=1}^{n} Z_i \end{vmatrix}$$